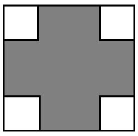
Cálculo de áreas sombreadas

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1) En la figura se tiene un cuadrado de lado ℓ = 4 cm. En las esquinas se tiene 4 cuadrados de lado ℓ/3. Calcular el área de la región sombreada



Solución:

a) Cálculo del área del cuadrado de ℓ = 4 cm :

$$A\square = \ell^2 = (4cm)^2 = 16\ cm^2$$

b) Cálculo del área del cuadrado de lado ℓ/3:

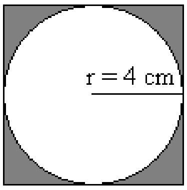
$$A\square = \left(\frac{4}{3}cm\right)^2 = \frac{16}{9}cm^2 = 1{,}78\ cm^2$$

c) Cálculo del área de la región sombreada

Área Sombreada = $A\square$ - 4$A\square$ = $16\ cm^2 - 4 \cdot (1{,}78\ cm^2)$

Área Sombreada **=** $16\ cm^2 - 7{,}12\ cm^2 = 8{,}88\ cm^2$

2) Calcular el área de la región sombreada



Solución:

a) Cálculo del área del círculo

$$AO = \pi r^2 \Rightarrow AO = \pi(4cm)^2 = \pi \cdot 16cm^2 = 3{,}14 \cdot 16cm^2 = 50{,}24\ cm^2$$

b) Cálculo del área del cuadrado

Si el radio de la circunferencia es 4cm, entonces el lado del cuadrado es 8 cm, es decir, Si rO = 4 cm □ ℓ□ = 8cm

Entonces el área del cuadrado es:

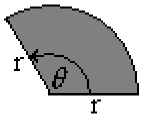
$$A\square = \ell^2 = (8cm)^2 = 64\ cm^2$$

c) Cálculo del área de la región sombreada

Se obtiene al restar el área del círculo de la del cuadrado

$$A\blacksquare = A\square - A\bigcirc = 64\ cm^2\ 50{,}24\ cm^2 = 13{,}76\ cm^2$$

3) Calcular el área de la región sombreada (sector circular) en donde $r = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ cm y el □ tiene un tercio de 360^0



Solución:

a) Cálculo del radio r:

Si $r = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} cm$ □ $r = \left(\frac{27}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3\ \ cm$

b) Cálculo del ángulo □□

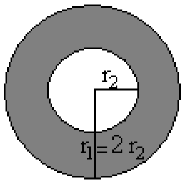
$\theta = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$

c) Cálculo del área del sector circular:

A◆$= \frac{\pi r^2 \theta}{360^0} = \frac{3{,}14 \cdot (3cm)^2 \cdot 120^0}{360^0} = \frac{3{,}14 \cdot 9cm^2 \cdot 120^0}{360^0}$

A◆$= \frac{3{,}14 \cdot 3cm^2 \cdot 1}{1} = 9{,}42\ \ cm^2$

4) Calcular el área de la región sombreada (corona circular) en donde $r_2 = \sqrt[4]{4^2}$ cm .



Solución:

a) Cálculo del radio subdos:

Si $r_2 = \sqrt[4]{4^2}$ cm □ $r_2 = 4^{\frac{2}{4}} cm = 4^{\frac{1}{2}} cm = \sqrt[2]{4^1} cm = 2\ \ cm$

b) Cálculo del radio subuno:□

Si $r_1 = 2r_2 \Rightarrow r_1 = 2 \cdot 2\ \ cm \rightarrow r_1 = 4\ \ cm$

c) Cálculo del área del círculo de radio subdos:

$AO = \pi r^2 \Rightarrow Ao_2 = 3{,}14 \cdot (2\ \ cm)^2 = 3{,}14 \cdot 4\ \ cm^2 = 12{,}56\ \ cm^2$

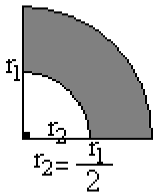
d) Cálculo del área del círculo de radio subuno:

A● $= \pi r^2 \Rightarrow A$●$_1 = 3{,}14 \cdot (4\ \ cm)^2 = 3{,}14 \cdot 16\ \ cm^2 = 50{,}24\ \ cm^2$

e) Cálculo del área de la corona circular

A◎ $= A$●$_2 - Ao_1 \Rightarrow A$◎ $= 50{,}24\, cm^2 - 12{,}56\, cm^2 = 37{,}68\, cm^2$

5) Calcular el área de la región sombreada (trapecio circular) en donde $r_1 = \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ cm .



Solución:

a) Cálculo del radio subuno:

Si $r_1 = \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ cm $\Rightarrow$ $r_1 = \left(\frac{16}{1}\right)^{\frac{1}{2}}$ cm = $(16)^{\frac{1}{2}}$ cm = $\sqrt[2]{16^1}$ cm

$\Rightarrow$ $r_1 = 4$ cm

b) Cálculo del radio subuno:

Si $r_2 = \frac{r_1}{2} \Rightarrow r_2 = \frac{4\ cm}{2} = 2\ cm$

c) Cálculo del sector circular de radio subuno:

$$A_{\blacklozenge} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^0} \Rightarrow A_{\blacklozenge 1} = \frac{3{,}14 \cdot (4cm)^2 \cdot 90^0}{360^0} \Rightarrow A_{\blacklozenge 1} = 12{,}56\ cm^2$$

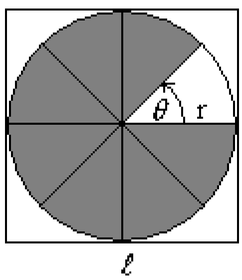
d) Cálculo del sector circular de radio subdos:

$$A_{\lozenge} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^0} \Rightarrow A_{\lozenge 2} = \frac{3{,}14 \cdot (2cm)^2 \cdot 90^0}{360^0} \Rightarrow A_{\lozenge 2} = 3{,}14\ cm^2$$

e) Cálculo del área del trapecio circular:

$$A = A_{\blacklozenge 1} - A_{\lozenge 2} \Rightarrow A = 12{,}56\ cm^2 - 3{,}14\ cm^2 = 9{,}42\ cm^2$$

6) De una pizza se ha comido $64^{-\frac{1}{2}}$ como indica la figura:



La pizza cabe exactamente en una caja cuadrada que tiene 160 cm de perímetro. Calcular el área y la longitud del arco de la parte comida.

Solución.- Primera forma:

a) Cálculo del lado de la caja cuadrada

Si el perímetro es $P = 4\ell \Rightarrow \ell = \frac{P}{4} \Rightarrow \ell = \frac{160\ cm}{4} = 40\ cm$

b) Cálculo del radio de la pizza

Si $\ell = 40\ \ cm \Rightarrow Diámetro(D) = 40\ \ cm$

Si $D = 40\ \ cm \Rightarrow radio(r) = \dfrac{D}{2} \Rightarrow r = \dfrac{40\ \ cm}{2} = 20\ \ cm$

c) Cálculo del área total de la pizza

$A\bullet = \pi r^2 \Rightarrow A\bullet = 3{,}14 \cdot (20cm)^2 = 3{,}14 \cdot 400cm^2 = 1256\ \ cm^2$

d) Cálculo del área de la parte comida

Como la parte comida es $64^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{64^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{64^1}} = \dfrac{1}{8}$ de la pizza,

Entonces:

$$\text{Parte Comida} = A\Diamond = \frac{1}{8}\bullet \Rightarrow A\Diamond = \frac{1}{8} \cdot 1256\ \ cm^2 = 157\ \ cm^2$$

e) Cálculo del perímetro de la pizza

$P\text{O} = 2\pi r \Rightarrow P = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20cm = 125{,}6\ \ cm$

f) Cálculo de la longitud del arco de la parte comida

$\widehat{a} = \dfrac{1}{8} P\text{O} \Rightarrow \widehat{a} = \dfrac{1}{8} \cdot 125{,}6cm = 15{,}7\ \ cm$

Solución.- Segunda forma:

a) Cálculo del lado de la caja cuadrada

Si el perímetro es $P = 4\ell$ □ $\ell = \dfrac{P}{4}$ □□□ $\ell = \dfrac{160\ \ cm}{4} = 40\ \ cm$

b) Cálculo del radio de la pizza

Si $\ell = 40\ \ cm \Rightarrow Diámetro(D) = 40\ \ cm$

Si $D = 40\ \ cm \Rightarrow radio(r) = \dfrac{D}{2} \Rightarrow r = \dfrac{40\ \ cm}{2} = 20\ \ cm$

c) Cálculo del ángulo □

$\theta = \dfrac{360^0}{n} \Rightarrow \theta = \dfrac{360^0}{8} = 45^0$

d) Cálculo del área de la parte comida

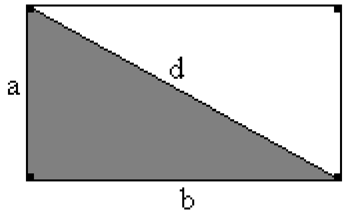
$$A\Diamond = \frac{\pi r^2 \theta}{360^0} \Rightarrow A\Diamond = \frac{3{,}14 \cdot (20\ \ cm)^2 \cdot 45^0}{360^0} = 157\ \ cm^2$$

e) Cálculo de la longitud del arco de la parte comida

$$\widehat{a} = \frac{2\pi r\theta}{360^0} \Rightarrow \hat{a} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20\ \ cm \cdot 45^0}{360^0} = 15{,}7\ \ cm$$

Nota: Recuerde que tanto en Matemática como en la vida diaria el mismo problema tiene varias formas de solución. En este contexto, la Matemática cumple un rol estratégico, ya que esta ciencia permite ver soluciones en donde otros no observan.

7) Calcular el área de la región sombreada en donde d **=** $100^{\frac{1}{2}}$ cm y b = $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$ cm.



Solución:

a) Cálculo de la diagonal:

Si d **=** $100^{\frac{1}{2}}$ cm □ $d = \sqrt[2]{100^1}\, cm = 10\ cm$

b) Cálculo de la base:

Si b = $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$ cm□□ $b = \left(\frac{64}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{64^1} = 8\ cm$

c) Cálculo de la altura aplicando el Teorema de Pitágoras:

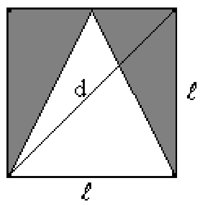
$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{d^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{(10\ cm)^2 - (8\ cm)^2} = \sqrt{100\ cm^2 - 64\ cm^2} = \sqrt{36\ cm^2} = 6\ cm$$

d) Cálculo del área de la región pintada, la misma que es un triángulo:

A **=** $\frac{b \cdot a}{2} = \frac{8\ cm \cdot 6\ cm}{2} = \frac{48\ cm^2}{2} = 24\ cm^2$

9) Si d = $6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



Solución:

a) Cálculo de la diagonal

Si d = $6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ cm □ $d = 6 \cdot \sqrt[2]{2^1}\ cm \Rightarrow d = 6\sqrt{2}\ cm$

b) Cálculo del lado del cuadrado

Por Pitágoras $d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{\dfrac{d^2}{2}}$

$$\ell = \sqrt{\frac{\left(6\sqrt{2}\ \ cm\right)^2}{2}} = \sqrt{\frac{36\cdot 2\ \ cm^2}{2}} = \sqrt{36\ \ cm^2} = 6\ \ cm$$

c) Cálculo del área del cuadrado

$$A_{\blacksquare} = \ell^2 = (6cm)^2 = 36\ \ cm^2$$

d) Cálculo del área del triángulo sin sombrear

$$A\triangle = \frac{base \cdot altura}{2} \Rightarrow A\triangle = \frac{6cm \cdot 6cm}{2} = \frac{36\ \ cm^2}{2} = 18\ \ cm^2$$

e) Cálculo del área sombreada

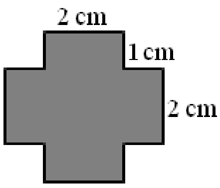
$$A_{\boxed{\triangle}} = A_{\blacksquare} - A\triangle = 36\ cm^2 - 18\ cm^2 = 18\ cm^2$$

EJERCICIOS DE REFUERZO

1) ¿El área de un rectángulo equilátero cuya diagonal mide 2 cm es?

a) 2 cm^2 b) 4 cm^2 c) 1 cm^2 d) 3 cm^2 a)

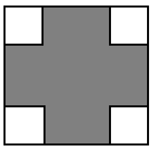
2) El área de la figura es:



a) 10 cm^2 b) 12 cm^2 c) 14 cm^2 d) 16 cm^2

b)

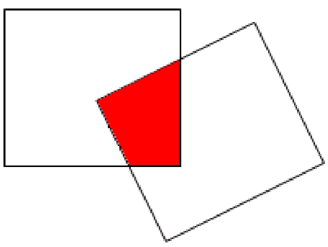
3) En la figura se tiene un cuadrado de lado 2a. En las esquinas se tiene 4 cuadrados de lado a/2, entonces el área sombreada es:



a) 2 a^2 b) 3 a^2 c) 6 a^2 d) 8 a^2

b)

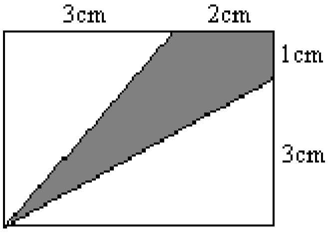
4) El centro de un cuadrado de 2 cm de lado coincide en el vértice de otro cuadrado congruente. ¿Cuál es el área en cm^2, de la parte común de estos dos cuadrados?



a) 1 cm^2 b) 1,5 cm^2 c) 2 cm^2 d) 2,5 cm^2

a)

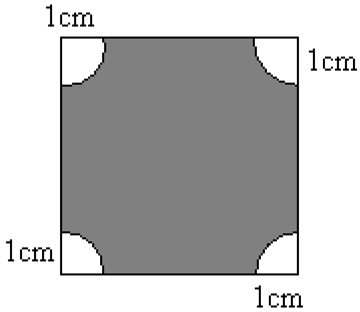
5) Calcular el área sombreada de la siguiente figura



a) 13/2 cm^2 b) 13 cm^2 c) 15/2 cm^2 d) 7,5 cm^2

a)

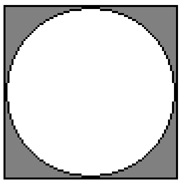
6) El lado del cuadrado es 6 cm. Calcular el área de la región sombreada



a) (36-π) cm^2 b) (44-π) cm^2 c) 4(9-π) cm^2 d) (36-4π) cm^2

a)

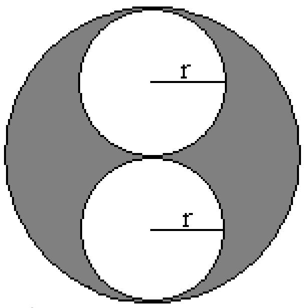
7) El radio de la circunferencia es 2 cm. Calcular el área de la región sombreada



a) (36-π) cm^2 b) (44-π) cm^2 c) 4(4-π) cm^2 d) (5-4π) cm^2

c)

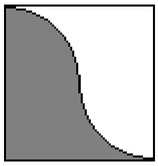
8) Si r=4 cm. Calcular el área de la región sombreada



a) 46π cm^2 b) 44π cm^2 c) 40π cm^2 d) 32π cm^2

d)

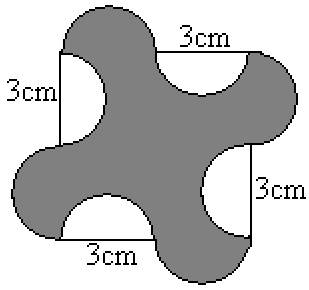
9) El lado del cuadrado es 4 cm. Calcular el área de la región sombreada



a) $4\ cm^2$ b) $6\ cm^2$ c) $8\ cm^2$ d) $16\ cm^2$

c)

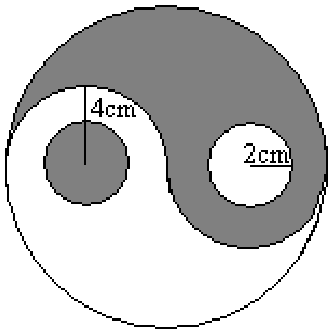
10) Calcular el área de la región sombreada



a) $18\ cm^2$ b) $36\ cm^2$ c) $16\ cm^2$ d) $49\ cm^2$

b)

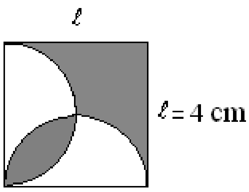
11) Calcular el área de la región sombreada



a) $64\pi\ cm^2$ b) $32\pi\ cm^2$ c) $16\pi\ cm^2$ d) $8\pi\ cm^2$

b)

12) El área de la región sombrea es:



a) $4\ cm^2$ b) $6\ cm^2$ c) $8\ cm^2$ d) $10\ cm^2$

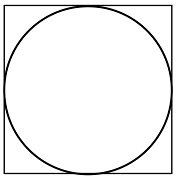
c)

13) Con 625 baldosas cuadradas de 20cm de lado se desea embaldosar una sala cuadrada. ¿Cuál es largo de la sala?

a) 25 m b) 5 m c) 4 m d) 10 m

b)

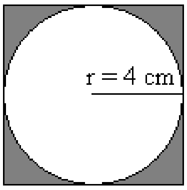
14) Se desea recortar un espejo de forma circular de radio 30 cm a partir de un cuadrado. ¿Cuál es el área del menor cuadrado?



a) $3600\ cm^2$ b) $240\ cm^2$ c) $900\ cm^2$ d) $1000\ cm^2$

a)

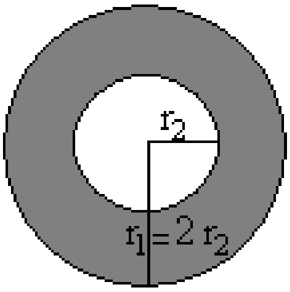
15) Calcular el área de la región sombreada



a) $16(4-\pi)\ cm^2$ b) $4(16-\pi)\ cm^2$ c) $16(5-\pi)\ cm^2$ d) $26(4-\pi)\ cm^2$

a)

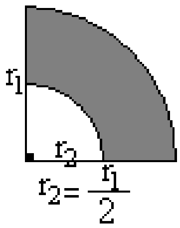
16) Calcular el área de la región sombreada (corona circular) en donde $r_2 = 2$ cm



a) $12\pi\ cm^2$ b) $16\pi\ cm^2$ c) $5\pi\ cm^2$ d) $4\pi\ cm^2$

a)

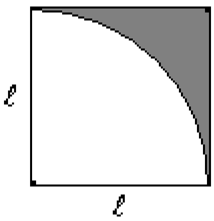
17) Calcular el área de la región sombreada (trapecio circular) en donde $r_{1=}$ 4 cm



a) $2\pi\ cm^2$ b) $4\pi\ cm^2$ c) $3\pi\ cm^2$ d) $6\pi\ cm^2$

c)

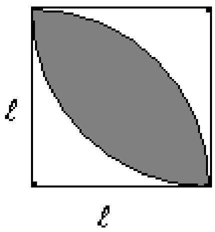
18) Si el lado del cuadrado mide 4 cm. Calcular el área de la región sombreada



a) $4(4-\pi)\ cm^2$ b) $4(\pi-1)\ cm^2$ c) $4(5-\pi)\ cm^2$ d) $4(\pi-2)\ cm^2$

a)

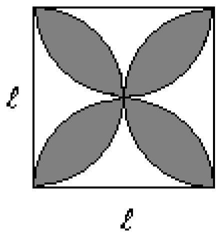
19) Si el lado del cuadrado mide 4 cm. Calcular el área de la región sombreada



a) $16(\pi-1)$ cm^2 b) 4π cm^2 c) 3π cm^2 d) $8(\pi-2)$ cm^2

d)

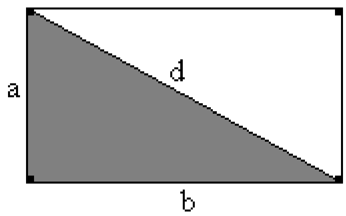
20) Si el lado del cuadrado mide 4 cm. Calcular el área de la región sombreada



a) $16(\pi-2)$ cm^2 b) $8(\pi-2)$ cm^2 c) $4(\pi-2)$ cm^2 d) $2\pi-4$ cm^2

b)

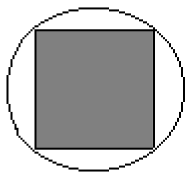
21) Calcular el área de la región sombreada en donde d =10 cm y b =8 cm.



a) 24 cm^2 b) 44 cm^2 c) 48 cm^2 d) 12 cm^2

a)

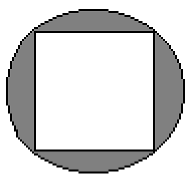
22) El diámetro de la circunferencia es 4 cm. Calcular el área de la región sombreada



a) 8 cm^2 b) 16 cm^2 c) 32 cm^2 d) 64 cm^2

a)

23) En la figura, el perímetro del cuadrado es $4\sqrt{2}$. El área sombreada es:



a) $4\pi-2$ b) $3\pi-2$ c) $2\pi-1$ d) $\pi-2$

d)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AYALA, ORLANDO, (2006), Matemática Recreativa, M & V GRÁFIC. Ibarra, Ecuador
SUÁREZ, MARIO

BENALCÁZAR, Marco, (2002), Unidades para Producir Medios Instruccionales en Educación, SUÁREZ, Mario Ed. Graficolor, Ibarra, Ecuador.
SUÁREZ, Mario, (2004), Interaprendizaje Holístico de Matemática, Ed. Gráficas Planeta, Ibarra, Ecuador.

SUÁREZ, Mario, (2004), Hacia un Interaprendizaje Holístico de Álgebra y Geometría, Ed. Gráficas Planeta, Ibarra, Ecuador.

Autor:
Mario Orlando Suárez Ibujes